

2025年度

## C<sub>b</sub> 数 学 問 題

### 注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて黒鉛筆または黒のシャープペンシルで記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。  
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I . 次の空欄ア～ケにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 自然数  $n$  に対して  $a_n = 2^n$  とし、積  $a_1 a_2 \cdots a_n$  を  $A_n$  とおく。このとき  $A_n \geq 10^{10}$  を満たす最小の  $n$  は  である。ただし、 $\log_2 10 = 3.3219$  とする。

(ii) 2つの平面ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  は、 $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$  を満たすとする。このとき、内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  の値は  である。また、 $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 + |3\vec{a} - 2\vec{b}|^2$  の値は  である。

(iii) 定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \sin 2x \, dx$  の値は  である。

(iv) 箱の中に緑色のカードが5枚、黄色のカードが4枚、赤色のカードが3枚入っている。箱から無作為にカードを3枚取り出すとき、3枚とも同じ色である確率は  , 3枚の色がすべて異なる確率は  , 2枚が同じ色であり、かつ、残りの1枚が他の2枚と異なる色である確率は  である。

(v)  $i$  を虚数単位とする。実数  $a$ ,  $b$  が等式

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^9 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{11} = a + bi$$

を満たすとき、 $a =$   ,  $b =$   である。



II. 実数  $x$  に対し, 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x + 4 \sin x \cos x$$

により定める。また,  $t = \sin x + \cos x$  とおく。次の問 (i) ~ (iv) に答えよ。解答欄には, (i), (ii) については答えのみを, (iii), (iv) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

- (i)  $\sin x \cos x$  を  $t$  を用いて表せ。
- (ii)  $f(x)$  を  $t$  を用いて表せ。
- (iii)  $x$  がすべての実数を動くとき,  $t$  のとりうる値の範囲を求めよ。
- (iv)  $x$  がすべての実数を動くとき,  $f(x)$  の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。



Ⅲ.  $a, p$  を正の実数とする。座標平面上の曲線  $C_1: y = e^x$  と  $C_1$  上の点  $P(p, e^p)$  がある。Pにおける  $C_1$  の法線を  $\ell$ ,  $\ell$  と  $x$  軸の交点を  $A(a, 0)$ ,  $A$  を中心とする半径  $r$  の円を  $C_2$  とする。Pが  $C_1$  と  $C_2$  のただ一つの共有点であるとき、次の問(i)～(v)に答えよ。解答欄には、(i)～(iii)については答えのみを、(iv), (v)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i)  $\ell$  の方程式を  $p$  を用いて表せ。

(ii)  $a$  を  $p$  を用いて表せ。

(iii)  $r$  を  $p$  を用いて表せ。

(iv)  $\angle OAP = \frac{\pi}{6}$  のとき、 $p$  の値を求めよ。

(v)  $p$  を(iv)で求めた値とするとき、次の不等式の表す領域  $D$  の面積  $S$  を求めよ。

$$-2 \leq x \leq p, \quad y \geq 0, \quad y \leq e^x, \quad (x - a)^2 + y^2 \geq r^2.$$

【以下余白】

